Chapitre 3

Sommes et produits

Plan du chapitre

1 Sommes et produits

1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Définition 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donnés n nombres réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$, on notera leur somme et leur produit par :

$$a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{"somme pour } i \text{ allant de 1 à } n \text{ des } a_i\text{"}.$$

$$a_1 \times \ldots \times a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{"produit pour } i \text{ allant de 1 à } n \text{ des } a_i\text{"}.$$

La lettre i est appelé l'indice de sommation. Il s'agit toujours d'un **nombre entier**. Le choix de la lettre i de est arbitraire, on peut remplacer cette lettre par toute autre symbole qui n'est pas déjà utilisé. On dit que i est une variable muette.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\heartsuit=1}^{n} a_\heartsuit \qquad \text{mais pas } \sum_{n=1}^{n} a_n \quad !!$$

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

Remarque. Comment noter la somme ou le produit des termes d'indices pairs, par exemple $a_2, a_4, \ldots, a_{2p}$ avec $2p \leq N$? Deux méthodes sont possibles :

Ou bien on écrit directement

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2p} = \sum_{i=1}^{p} a_{2i}$$

et même, plus généralement, $\sum_{i=1}^{p} a_{\varphi(i)}$ avec φ la fonction définie par $\varphi(i) = 2i$.

Ou bien, on pose $I = \{2, 4, \ldots, 2p\}$ et on peut écrire

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2p} = \sum_{i \in I} a_i$$

Définition 3.2

Soit I et E deux ensembles quelconques. On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est une <u>famille d'éléments de E indexée par I</u> si pour tout $i \in I$, on a $a_i \in E$.

Cela revient à définir une fonction $a : I \to E$ et, pour tout $i \in I$, de poser $a_i := a(i)$.

Exemple 2.

- Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à une famille $(u_0, u_1, \cdots)$ de réels indexés par $\mathbb{N}$. On peut aussi la voir comme une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à n associe u_n.
- Lorsque $I = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est en général notée $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Hypothèse

Dans ce chapitre, on se restreindra toujours au cas où la somme (ou le produit) ne concerne qu'un nombre fini de termes. **On supposera dans toute la suite que I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$.**

Remarque. Dans une somme finie, on peut sommer les termes dans l'ordre qu'on souhaite sans changer le résultat.

Exemple 3.
On pose $I = \{1, 2, \cdots, 10\}$ et $(a_i)_{i \in I}$ la famille définie par $a_1 = -2$ et $a_2 = \cdots = a_{10} = 10$. Que vaut $\sum_{i \in I} a_i$?

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n \text{ termes}} = n\alpha$$

$$\sum_{i=45}^{55} i = \ldots$$

$$\sum_{i=7}^{7} i^2 = \ldots$$

$$\prod_{i=0}^{4} 3 = \ldots$$

$$\prod_{i=1}^{4} 2^i = \ldots$$

Soit p, q deux entiers tels que $p \leq q$.

Dans la somme $\sum_{i=p}^{q} (\cdots)$, il y a .... termes.

1.2 Opérations sur les sommes et produits

Propriété 3.3 (Opérations avec $\sum$ et $\prod$)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels. On note n le nombre d'éléments de I. Alors :

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i \qquad \prod_{i\in I}(a_ib_i)=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)\left(\prod_{i\in I}b_i\right)$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i \qquad \forall p\in\mathbb{N}\quad \prod_{i\in I}a_i^p=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)^p$$

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda)=\sum_{i\in I}a_i+n\lambda \qquad \prod_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda^n\prod_{i\in I}a_i$$

Attention ! En général $\sum_{i\in I}a_ib_i\neq\left(\sum_{i\in I}a_i\right)\left(\sum_{i\in I}b_i\right)$.

Propriété 3.4 (Relation de Chasles)

Soit 3 entiers $m\leq r\leq n$. Soit $(a_i)_{m\leq i\leq n}$ une famille de réels. On a :

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{i=m}^{r}a_i+\sum_{i=r+1}^{n}a_i \qquad \prod_{i=m}^{n}a_i=\left(\prod_{i=m}^{r}a_i\right)\left(\prod_{i=r+1}^{n}a_i\right)$$

Remarque (Convention de sommation sur $\varnothing$)**.** Par convention si l'ensemble de sommation I est vide on pose, pour toute famille :

$$\sum_{i\in\varnothing}a_i=0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\varnothing}a_i=1$$

C'est cette convention qui permet de prendre $r=n$ dans la Propriété 3.4.

Propriété 3.5 (Chasles généralisé)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On suppose que $J_1,\cdots,J_n$ forment une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{i\in J_1}a_i+\ldots+\sum_{i\in J_n}a_i \qquad \prod_{i\in I}a_i=\left(\prod_{i\in J_1}a_i\right)\cdots\left(\prod_{i\in J_n}a_i\right)$$

De même, dans la formule ci-dessus, si un des ensembles $J_1,\cdots,J_n$ est vide, cela ne pose aucune problème et la formule reste valide. Attention cependant, les sommations ou produits sur le vide peuvent être à double tranchant et le mieux reste, à l'écrit, d'exclure ces cas lorsqu'ils arrivent et à l'oral, de le préciser à l'examinateur.

Exemple 4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n}\min(i,n)$.

1.3 Méthodes de calculs sur les sommes

Méthode (Changement d'indice)

Soit trois entiers $m \leq n$ et p, ainsi que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} z_{k+p} = \sum_{i=m+p}^{n+p} z_i \qquad \text{avec } i = k+p$$

Penser à vérifier avec les valeurs aux bornes pour ne pas faire d'erreurs.

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{k} = \sum_{j=0}^{n} \dots \qquad \text{avec } j = \dots$$

Méthode (Symétrisation)

Soit $m \leq n$ deux entiers et $(z_i)_{m\leq k\leq n}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \sum_{i=m}^{n} z_{n+m-i} \qquad \text{avec } k = n+m-i$$

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+1-k) = \sum_{j=1}^{n} \ln(j)$.

Méthode (Sommes télescopiques)

Soit $m \leq n$ deux entiers et $(z_i)_{m \leq k \leq n+1}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} \cancel{- z_n + z_n} - \ldots \cancel{- z_{m+1} + z_{m+1}} - z_m$$

Exemple 7. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

Méthode (Compensation des sommes identiques)

De manière très générale, étant donné une expression $S = \displaystyle\sum_{k \in \ldots} a_k - \sum_{k \in \ldots} b_k$ où les termes a_k et b_k sont très similaires, on essaye (par des réécritures, des changements d'indices, du Chasles) de se ramener à

$$S = \cdots = \sum_{k \in I} c_k - \sum_{k \in I} c_k + R = R$$

où R est un reste qui ne contient plus de somme. Cf exemple suivant.

Exemple 8. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

Remarque (Un "dépassement" de 1 : OK. De 2 ou plus, NON)**.** Observer comment il a fallu disjoindre les cas $n = 1$ et $n \geq 2$ ci-dessus. Si on fait le calcul du cas $n \geq 2$ pour n quelconque, on obtient un contre-sens car :

$$\text{si } n = 1, \text{ alors :} \qquad 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \neq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}}_{0} = 1 + \frac{1}{2}$$

Moralité : avec la convention qu'on s'est fixée, on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n} (\ldots)$ sans problème, mais écrire $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{n} (\ldots)$ est très risqué !

Remarque (Changements d'indice licites)**.** Pour transformer un indice j en un indice k, les seuls changements possibles sont de la forme $j = \pm k + p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Toute autre forme peut mener à une contradiction :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2k+1} \qquad \underset{j=2k+1\,?}{\rightsquigarrow} \qquad \sum_{j=3}^{7} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

1.4 Sommes classiques

Remarque. Rappel : si $x \neq 0$, alors $x^0 = 1$. En revanche, "0^0" n'est pas défini et il ne faut donc pas l'écrire. On verra en effet que poser $0^0 = 1$ crée des problèmes dans des calculs de limites.

Néanmoins, dans le cadre d'une somme, par convention : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k := 1 + x + \ldots + x^n$ pour tout réel x, même pour $x = 0$. Cela fait partie de la définition de la notation "somme". Quand on développe une somme, tout x^0 est en fait traité comme un 1 (et on évitera d'écrire x^0).

Propriété 3.6 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} b^j$$

Démonstration. La dernière égalité découle d'un changement de variable par symétrisation. Montrons la permière égalité. Un calcul direct donne :

$\square$

Remarque. Pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Propriété 3.7 (Sommes usuelles)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$
3. **Somme géométrique :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Montrons la première formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, donc la propriété est vérifiée au rang 1.
- Supposons la propriété vérifiée à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons-la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= n + 1 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

d'où la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

- Finalement, on a démontré la formule pour tout rang $n \in \mathbb{N}^*$.

La deuxième formule se montre également par récurrence (laissée en exercice).
Pour la dernière formule : elle est immédiate si $x = 1$. Supposons $x \neq 1$. Par la Propriété 3.7 :

$$1 - x^{n+1} = 1^{n+1} - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$

En divisant par $1 - x$, on retrouve la formule voulue. □

1.5 Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées par plusieurs indices, par exemple $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]}$ est une famille de 6 éléments :

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \qquad a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}$$

Grossièrement, on appelle somme double une somme qui fait intervenir deux indices de sommation : un exemple simple de somme double est

$$S = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)$$

Pour calculer une somme double, il faut se ramener à calculer deux sommes simples imbriquées. Dans la suite, pour simplifier, on considère que les indices de sommation commencent tous à 1.

Calcul de somme double (cas simple, ou rectangulaire) Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer une somme double de la forme

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

- Méthode directe : pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$ **fixé**, on calcule la somme $S_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Puis, on calcule $S = \sum_{i=1}^{m} S_i$.
- Si la méthode directe ne marche pas, on intervertit les deux sommes :

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

puis on réessaye la méthode directe : pour tout $j \in [\![m, n]\!]$ **fixé**, on calcule $R_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ puis on calcule $S = \sum_{j=1}^{n} R_j$.

Exemple 9. Par linéarité (Proposition 3.3), calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j)$.

Calcul de somme double (cas ardu, ou triangulaire) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il peut arriver que la sommation de la seconde somme dépend de l'indice de la première somme :

$$S = \sum_{\boxed{i}=1}^{n} \sum_{j=1}^{\boxed{i}} a_{ij} \quad = \quad \underbrace{a_{11}}_{i=j=1} + \underbrace{a_{21} + a_{22}}_{\text{termes si } i=2} + \underbrace{a_{31} + a_{32} + a_{33}}_{\text{termes si } i=3} + \dots$$

- Méthode directe : comme dans le cas simple, pour un $i \in [\![1, n]\!]$ **fixé**, on pose $S_i := \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$. On calcule chaque S_i, puis on calcule $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$.
- Si la méthode directe ne marche pas, on intervertit les sommes mais ATTENTION ! Ici on ne peut plus intervertir directement :
$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \neq \cancel{\sum_{j=1}^{i} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$$
Écrire $\sum_{j=1}^{i} \sum_{i=1}^{n} (\dots)$ n'a d'ailleurs aucun sens : quel serait la valeur maximale pour l'indice j, alors que i est une variable muette qui n'existe que dans la seconde somme ?

  Dans un cas "ardu", il faut faire attention pour permuter les sommes :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

$i \setminus j$	1	2	3	$\cdots$	n
1	x				
2	x	x			
3	x	x	x		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	x	x	x	$\cdots$	x

  Une fois qu'on a interverti les sommes, on réessaye la méthode directe : pour chaque j **fixé** on essaye de calculer $R_i = \sum_{i=j}^{n} a_{ij}$, puis $S = \sum_{j=1}^{n} R_j$.

Exemple 10. Calculer $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Quelques notations :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

Dans un cas “simple” $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, si on peut écrire $a_{ij} = b_i c_j$, on peut très facilement calculer la somme double :

Propriété 3.8 (Découplage de sommes doubles)

Soit $m,n \in \mathbb{N}$. Soit $(b_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ deux familles de réels. Alors

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} c_j\right).$$

Plus généralement, si I,J sont des parties finies de $\mathbb{N}$ et $(b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J}$ sont des familles de réels :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} c_j\right).$$

Démonstration.

□

Exemple 11. Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficient binomial, combinaisons

Définition 3.9 (Factorielle et coefficient binomial)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre entier factorielle n, noté $n!$ est défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{produit des } n \text{ premiers entiers}$$

Et par la convention qu'on a vue, $0! = 1$.

Soit $k \leq n$ deux entiers naturels. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dit "k parmi n", est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En pratique, moult termes se simplifient : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times 7\times 6\times \cancel{5\times 4\times 3\times 2\times 1}}{3\times 2\times 1\times \cancel{5\times 4\times 3\times 2\times 1}} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2} = 8\times 7 = 56.$

Expression alternative : pour tous entiers $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(k+1)}{(n-k)!} \qquad \left(\text{si } k=n, \text{ le numérateur vaut } \prod_{j=n+1}^{n} j = 1\right)$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de *combinaisons* de k éléments parmi n éléments. Par exemple $\binom{4}{2} = 6$ signifie que pour un ensemble à 4 éléments, comme $\{a,b,c,d\}$, il y a 6 sous-ensembles de 2 éléments :

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{a,d\} \quad \{b,c\} \quad \{b,d\} \quad \{c,d\}$$

Propriété 3.10 (Symétrie)

Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. Immédiat par la définition. □

Exemple 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dots$

Propriété 3.11 (Triangle de Pascal)

Soit $0 \leq k < n$ deux entiers. Alors
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. Un calcul direct donne :

□

Triangle de Pascal. Le placement des 1 découle de l'exemple 12. Le reste se déduit de la proposition ci-dessus.

2.2 Binôme

Théorème 3.12 (Formule du binôme de Newton)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

Démonstration. La seconde égalité découle du changement d'indice $j = n - k$ (symétrisation). Il suffit donc de montrer la première égalité pour montrer la formule entière. Montrons par récurrence que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} = 1 = (a+b)^0$$

où la dernière égalité est vraie par la convention $0^0 = 1$. Ainsi la formule est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Donc la formule est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque. Calcul de $(a+b)^n$ pour des petites valeurs de n : on forme le triangle de Pascal jusqu'à n. Une fois la ligne numéro n formée, on lit les coefficients $\binom{n}{k}$.

Exemple 13.

- Calcul de $(a+b)^6$

- Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

- Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$